BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐỒNG THÁP

BÁO CÁO TỔNG KẾT

ĐỀ TÀI NGHIÊN CỨU KHOA HỌC CỦA SINH VIÊN

VỀ ĐỊNH LÍ ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHUNG CHO ÁNH XẠ TRÊN KHÔNG GIAN KIỂU-MÊTRIC

Mã số: CS2013.02.29

Chủ nhiệm đề tài: Hoàng Hiền Hưởng

Đồng Tháp, 4/2014

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐỒNG THÁP

BÁO CÁO TỔNG KẾT

ĐỀ TÀI NGHIÊN CỨU KHOA HỌC CỦA SINH VIÊN

VỀ ĐỊNH LÍ ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHUNG CHO ÁNH XẠ TRÊN KHÔNG GIAN KIỂU-MÊTRIC

Mã số: CS2013.02.29

Xác nhận của Chủ tịch HĐ nghiệm thu **Chủ nhiệm đề tài**

Hoàng Hiền Hưởng

Đồng Tháp, 4/2014

MỤC LỤC

BỘ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO	CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM
TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐỒNG THÁP	**Độc lập - Tự do - Hạnh phúc**

TÓM TẮT KẾT QUẢ ĐỀ TÀI NGHIÊN CỨU KHOA HỌC CỦA SINH VIÊN

Tên đề tài: Về định lí điểm bất động chung cho ánh xạ trên không gian kiểu-mêtric

Mã số: CS2013.02.29

Chủ nhiệm đề tài: Hoàng Hiền Hưởng

Tel.: 0983563189 E-mail: hoanghienhuong@gmail.com

Cơ quan chủ trì đề tài: Trường Đại học Đồng Tháp

Cơ quan và cá nhân phối hợp thực hiện: Không

Thời gian thực hiện: 5/2013 đến 4/2014

1. Mục tiêu:

- Thiết lập và chứng minh định lí điểm bất động chung cho ánh xạ trên không gian kiểu-mêtric.

- Xây dựng một số áp dụng cho kết quả đạt được.

2. Nội dung chính:

- Không gian kiểu-mêtric.

- Định lí điểm bất động chung cho ánh xạ trên không gian kiểu-mêtric và áp dụng.

3. Kết quả chính đạt được (khoa học, ứng dụng, đào tạo, kinh tế - xã hội,...): Thiết lập và chứng minh được một định lí điểm bất động của lớp ánh xạ (μ, ψ)-f-co yếu tổng quát trên không gian kiểu-mêtric sắp thứ tự.

Đồng thời, chúng tôi cũng xây dựng một số áp dụng của kết quả đạt được trong việc thiết lập định lí điểm bất động kép trên không gian kiểu-mêtric. Các kết quả chính được nhận đăng trong 1 bài báo khoa học được nhận đăng trên Tạp chí Khoa học Đại học Đồng Tháp. Hơn nữa, các kết quả chính của đề tài cũng là một tài liệu tham khảo cho giảng viên và sinh viên Khoa Sư phạm Toán-Tin, Trường Đại học Đồng Tháp trong giảng dạy, nghiên cứu và học tập giải tích hiện đại.

Chủ nhiệm đề tài

Hoàng Hiền Hưởng

BỘ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐỒNG THÁP

CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM
Độc lập - Tự do - Hạnh phúc

SUMMARY

Project Title: On common fixed point theorems for mappings on metric-type spaces

Code number: CS2013.02.29

Coordinator: Hoàng Hiền Hưởng

Tel.: 0983563189 E-mail: hoanghienhuong@gmail.com

Implementing Institution: Dong Thap University

Cooperating Institution(s): No

Duration: from 2013, May to 2014, April

1. Objectives:

- To state and prove the fixed point theorem for mappings on metric-type spaces.

- To give some applications of the obtained results.

2. Main contents:

- Metric-type spaces.

- Common fixed point theorems on metric-type spaces and applications.

3. Results obtained: A fixed point theorem for (μ, ψ)-f-weakly contractive mappings in partially ordered metric-type spaces is stated and proved. Also, we give some applications of the results obtained in establishing some coupled fixed point theorems in metric-type spaces. The main results of project are accepted in a scientific article on Journal of Science of Dong Thap

University. Moreover, the results of project are also a reference for lecturers and students of Faculty Mathematics and Information Technology Teacher Education, Dong Thap University in studying, lecturing and researching advanced analysis.

Chủ nhiệm đề tài

Hoàng Hiền Hưởng

MỞ ĐẦU

1 Tổng quan tình hình nghiên cứu

Nhiều bài toán trong toán học và trong các lĩnh vực khoa học khác thường dẫn đến việc chứng minh sự tồn tại nghiệm của phương trình $F(x) = x$. Nghiệm x của phương trình này được gọi là điểm bất động của ánh xạ F. Do đó, việc xây dựng những công cụ khảo sát sự tồn tại điểm bất động của một ánh xạ thu hút sự quan tâm của nhiều tác giả. Trong những công cụ đó, Nguyên lý ánh xạ co Banach trong không gian mêtric đầy đủ được xem là cơ bản nhất. Từ nguyên lý này, nhiều tác giả đã mở rộng cho những lớp không gian khác nhau cũng như những lớp ánh xạ co suy rộng khác nhau.

Trong hướng nghiên cứu đó, nhiều tác giả đã xây dựng những không gian mêtric suy rộng và thiết lập nhiều dạng định lí điểm bất động trên những không gian mêtric suy rộng đó như 2-mêtric [8], D-mêtric [6], G-mêtric [17], S-mêtric [20],... Cùng hướng nghiên cứu này, trong bài báo [14], Khamsi đã giới thiệu khái niệm kiểu-mêtric. Đồng thời, trong bài báo này, tác giả đã trình bày một số tính chất của không gian kiểu-mêtric và thiết lập định lí điểm bất động trên không gian này. Sau đó, trong bài báo [7], các tác giả đã mở rộng Nguyên lý ánh xạ co Banach trong không gian mêtric đầy đủ sang không gian kiểu-mêtric này. Từ đó, việc nghiên cứu mở rộng từ các định lí điểm bất động cho các dạng ánh xạ co khác nhau trên không gian mêtric sang không gian kiểu-mêtric thu hút một số tác giả quan tâm nghiên cứu [10].

Bên cạnh việc đề xuất những không gian mêtric suy rộng, nhiều tác giả đã xây dựng những dạng ánh xạ co suy rộng trên các không gian đó [5, 18]. Năm 1972, Chatterjea đã giới thiệu khái niệm ánh xạ co suy rộng và được gọi là ánh xạ C-co [3]. Khái niệm này được Choudhury tổng quát thành khái niệm C-co yếu tổng quát trên không gian mêtric [4] và được Harjani và các cộng sự khảo sát trên không gian mêtric thứ tự [9]. Năm 2013, trong bài báo [2], Chandok đã tổng quát khái niệm C-co yếu tổng quát thành khái niệm ánh xạ (μ, ψ)-f-co yếu tổng quát trên không gian mêtric sắp thứ tự. Đồng thời, tác giả đã thiết lập một số định lí điểm bất động chung của lớp ánh xạ co này trong không gian mêtric sắp thứ tự.

Trong đề tài này, chúng tôi mở rộng một số kết quả về điểm bất động trong bài báo [2] sang không gian kiểu-mêtric. Đồng thời, chúng tôi xây dựng một số áp dụng của kết quả đạt được.

2 Tính cấp thiết của đề tài

Trên cơ sở nghiên cứu một số định lí điểm bất động trên không gian kiểu-mêtric, chúng tôi nhận thấy rằng những dạng định lí điểm bất động trên không gian mêtric trong [2] chưa được nghiên cứu trên không gian kiểu-mêtric. Vì vậy, chúng tôi đặt vấn đề tổng quát những định lí điểm bất động trong bài báo này trên không gian kiểu-mêtric.

Kết quả đề tài góp phần làm phong phú thêm các định lí điểm bất động trên không gian kiểu-mêtric trong lĩnh vực lí thuyết điểm bất động. Đồng thời, việc nghiên cứu đề tài góp phần nâng cao chất lượng dạy học và nghiên cứu khoa học của sinh viên và giảng viên tại Trường Đại học Đồng Tháp.

3 Mục tiêu nghiên cứu

- Thiết lập và chứng minh định lí điểm bất động chung cho ánh xạ trên không gian kiểu-mêtric.

- Xây dựng một số áp dụng cho kết quả đạt được.

4 Cách tiếp cận và phương pháp nghiên cứu

Cách tiếp cận: Trên cơ sở nghiên cứu tài liệu tham khảo liên quan đến đề tài, bằng cách tương tự những kết quả đã có trong tài liệu tham khảo đề xuất kết quả mới.

Phương pháp nghiên cứu: Nghiên cứu tài liệu, nắm vững những kết quả đã có, trình bày trước nhóm nghiên cứu. Cùng với sự hướng dẫn của giảng viên, sinh viên đề xuất và chứng minh kết quả mới.

5 Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Nghiên cứu dạng ánh xạ (μ, ψ)-f-co yếu tổng quát trên không gian kiểu-mêtric thuộc lĩnh vực lí thuyết điểm bất động.

6 Nội dung nghiên cứu

Đề tài nghiên cứu một số khái niệm, tính chất của không gian kiểu-mêtric, khái niệm ánh xạ (μ, ψ)-f-co yếu tổng quát trên không gian kiểu-mêtric, định lí điểm bất động chung cho ánh xạ (μ, ψ)-f-co yếu tổng quát trên không gian kiểu-mêtric và một số áp dụng của kết quả đạt được.

Ngoài Mục lục, Mở đầu, Kết luận và kiến nghị, Tài liệu tham khảo, nội dung chính của đề tài được trình bày trong hai chương.

Chương 1. Kiến thức chuẩn bị

Chương 2. Định lí điểm bất động chung cho ánh xạ trên không gian kiểu-mêtric và áp dụng

CHƯƠNG 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1 Không gian kiểu-mêtric

Mục này trình bày một số khái niệm, tính chất cơ bản của không gian kiểu-mêtric.

1.1.1 Định nghĩa ([14], Definition 2.7)**.** Cho X là một tập khác rỗng, $K \geq 1$ là một số thực và $D : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ là một ánh xạ thỏa mãn các điều kiện sau.

(1) $D(x, y) = 0$ khi và chỉ khi $x = y$;

(2) $D(x, y) = D(y, x)$ với mọi $x, y \in X$;

(3) $D(x, z) \leq K\big[D(x, y_1) + D(y_1, y_2) + \ldots + D(y_n, z)\big]$ với mọi $x, y_1, \ldots, y_n, z \in X$.

Khi đó, D được gọi là một *kiểu-mêtric* trên X và (X, D, K) được gọi là một *không gian kiểu-mêtric*.

1.1.2 Ví dụ. Cho $X = \{0, 1, 2\}$ và ánh xạ xác định bởi

$$D(0, 0) = D(1, 1) = D(2, 2) = 0,\ D(1, 2) = D(2, 1) = 4,$$
$$D(0, 1) = D(1, 0) = D(0, 2) = D(2, 0) = 1.$$

Khi đó D là một kiểu-mêtric trên X với $K = 2$.

Chứng minh. Kiểm tra trực tiếp các điều kiện của một kiểu-mêtric. $\square$

1.1.3 Nhận xét. (1) (X, d) là một không gian mêtric khi và chỉ khi $(X, d, 1)$ là một không gian kiểu-mêtric.

(2) Trong bài báo [15], Khamsi và Hussain đã giới thiệu một kiểu-mêtric khác, trong đó điều kiện (3) của Định nghĩa 1.1.1 được thay bởi điều kiện sau.

$$\text{(3')}\ D(x, z) \leq K\big[D(x, y) + D(y, z)\big] \text{ với mọi } x, y, z \in X.$$

Trong đề tài này, chúng tôi xét kiểu-mêtric theo Định nghĩa 1.1.1.

Khái niệm dãy hội tụ, dãy Cauchy, tính đầy đủ của không gian kiểu-mêtric này được định nghĩa như sau.

1.1.4 Định nghĩa ([14], Definition 2.8)**.** Cho (X, D, K) là một không gian kiểu-mêtric và $\{x_n\}$ là một dãy trong X. Khi đó

(1) Dãy $\{x_n\}$ được gọi là *hội tụ* đến $x \in X$, viết là $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ hoặc $\{x_n\} \to x$, nếu $\lim\limits_{n\to\infty} D(x_n, x) = 0$. Khi đó, x được gọi là *điểm giới hạn* của dãy $\{x_n\}$.

(2) Dãy $\{x_n\}$ được gọi là một *dãy Cauchy* nếu $\lim\limits_{n,m\to\infty} D(x_n, x_m) = 0$.

(3) Không gian (X, D, K) được gọi là *đầy đủ* nếu mỗi dãy Cauchy trong (X, D, K) là một dãy hội tụ.

1.1.5 Nhận xét. Trong không gian kiểu-mêtric (X, D, K), tôpô được hiểu là tôpô cảm sinh bởi sự hội tụ của nó. Điều này có nghĩa là tập G mở trong không gian kiểu-mêtric (X, D, K) khi và chỉ khi với mỗi $x \in G$, mọi dãy $\{x_n\} \subset X$ mà $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ thì tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $x_n \in G$ với mọi $n \geq n_0$. Khi đó, kiểu-mêtric $D : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ liên tục tại (x, y) nếu và chỉ nếu $\lim_{n\to\infty} D(x_n, y_n) = D(x, y)$ với mọi dãy $\{x_n\}, \{y_n\}$ trong X mà $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ và $\lim_{n\to\infty} y_n = y$.

1.1.6 Chú ý. Trong bài báo [10], các tác giả đã chứng tỏ rằng kiểu-mêtric là ánh xạ không liên tục, xem [10, Example 2.1].

1.1.7 Mệnh đề. *Cho (X, D, K) là một không gian kiểu-mêtric. Nếu dãy $\{x_n\}$ hội tụ thì điểm giới hạn của nó là duy nhất.*

Chứng minh. Giả sử tồn tại $x, y \in X$ sao cho $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ và $\lim_{n\to\infty} x_n = y$. Ta có

$$D(x, y) \leq K[D(x, x_n) + D(x_n, y)].$$

Suy ra $D(x, y) = 0$ hay $x = y$. Vậy $\{x_n\}$ hội tụ tới một phần tử duy nhất. □

1.2 Điểm bất động và điểm bất động kép

Mục này trình bày lại những khái niệm và kết quả được sử dụng trong đề tài.

1.2.1 Định nghĩa ([2])**.** Cho $(X, \preceq)$ là không gian mêtric sắp thứ tự và hai ánh xạ $T, f : X \longrightarrow X$. Khi đó

(1) Ánh xạ T được gọi là *f-đơn điệu không giảm* nếu với mọi $x, y \in X$ sao cho $fx \preceq fy$ thì $Tx \preceq Ty$.

(2) Ánh xạ T được gọi là *đơn điệu không giảm* nếu với mọi $x, y \in X$ sao cho $x \preceq y$ thì $Tx \preceq Ty$.

1.2.2 Định nghĩa ([2]). Cho X là không gian mêtric và hai ánh xạ $T, f : X \longrightarrow X$. Khi đó

(1) Điểm $x \in X$ được gọi là *điểm trùng* của T và f nếu $Tx = fx$.

(2) Điểm $x \in X$ được gọi là *điểm bất động* của f nếu $fx = x$.

(3) Điểm $x \in X$ được gọi là *điểm bất động chung* của T và f nếu $Tx = fx = x$.

Kí hiệu, $F(T; f)$ là tập các điểm bất động chung của T và f.

(4) T và f được gọi là *giao hoán tại* x nếu $Tfx = fTx$. T và f được gọi là *giao hoán* nếu nó giao hoán tại mọi $x \in X$.

(5) T và f được gọi là *tương thích yếu* nếu nó giao hoán tại những điểm trùng.

1.2.3 Định nghĩa ([1], Definition 1.2). Cho ánh xạ $F : X \times X \longrightarrow X$. Khi đó, $(x, y) \in X \times X$ được gọi là *điểm bất động kép* của F nếu $F(x, y) = x$ và $F(y, x) = y$.

1.2.4 Bổ đề ([19], Lemma 2.2). *Cho ánh xạ $F : X \times X \longrightarrow X$ và ánh xạ $T_F : X \times X \longrightarrow X \times X$ được định nghĩa bởi*

$$T_F(x, y) = (F(x, y), F(y, x)) \text{ với mọi } x, y \in X.$$

Khi đó, (x, y) là điểm bất động kép của F khi và chỉ khi (x, y) là điểm bất động của T_F.

1.2.5 Định nghĩa ([1], Definition 1.1). Cho $(X, \preceq)$ là tập sắp thứ tự và ánh xạ $F : X \times X \longrightarrow X$. Khi đó F được gọi là *đơn điệu hỗn hợp* nếu với mọi $x, y \in X$, ta có

$$x_1, x_2 \in X, x_1 \preceq x_2 \Longrightarrow F(x_1, y) \preceq F(x_2, y)$$

và

$$y_1, y_2 \in X, y_1 \preceq y_2 \Longrightarrow F(x, y_2) \preceq F(x, y_1).$$

1.2.6 Định nghĩa ([2]). Cho $(X, \preceq)$ là tập sắp thứ tự và W là tập con của X. Tập W được gọi là *tập sắp thứ tự tốt* nếu với $u, v \in W$ thì $u \preceq v$ hoặc $v \preceq u$.

1.2.7 Định nghĩa ([2]). Cho X là tập khác rỗng. Khi đó $(X, D, K, \preceq)$ được gọi là *không gian kiểu-mêtric sắp thứ tự* nếu (X, D, K) là không gian kiểu-mêtric và $(X, \preceq)$ là tập sắp thứ tự. Hơn nữa, nếu không gian (X, D, K) đầy đủ thì $(X, D, K, \preceq)$ được gọi là *không gian kiểu-mêtric sắp thứ tự đầy đủ.*

1.2.8 Định nghĩa ([13]). Hàm $\mu : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ được gọi là *biến thiên khoảng cách* nếu μ thoả mãn hai điều kiện sau.

(1) μ liên tục và không giảm;

(2) $\mu(t) = 0$ khi và chỉ khi $t = 0$.

1.2.9 Định nghĩa ([16]). Cho X, Y là hai tập con của tập số thực và hàm $\psi : X \times X \longrightarrow Y$ được gọi là *nửa liên tục dưới* trên $X \times X$ nếu với mỗi dãy $\{(x_n, y_n)\} \subset X \times X$, $\{(x_n, y_n)\}$ hội tụ đến $(x, y) \in X \times X$ thì $\liminf\limits_{n \to +\infty} \psi(x_n, y_n) \geq \psi(x, y)$.

Kí hiệu Ψ là tập các hàm $\psi : [0, \infty)^2 \longrightarrow [0, \infty)$ là hàm nửa liên tục dưới sao cho $\psi(x, y) = 0$ khi và chỉ khi $x = y = 0$.

CHƯƠNG 2

ĐỊNH LÍ ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHUNG CHO ÁNH XẠ TRÊN KHÔNG GIAN KIỂU-MÊTRIC VÀ ÁP DỤNG

2.1 Định lí điểm bất động chung cho ánh xạ trên không gian kiểu-mêtric

Mục này giới thiệu khái niệm ánh xạ (μ, ψ)-f-co yếu tổng quát trên không gian kiểu-mêtric sắp thứ tự. Đồng thời, chúng tôi thiết lập, chứng minh định lí điểm bất động chung cho lớp ánh xạ này trên không gian kiểu-mêtric sắp thứ tự và suy ra một số hệ quả từ định lí này. Các kết quả này là sự mở rộng của các kết quả chính trong [2] sang không gian kiểu-mêtric sắp thứ tự. Hơn nữa, chúng tôi cũng xây dựng ví dụ minh họa cho kết quả đạt được. Các kết quả chính của mục này được báo cáo trong Hội nghị sinh viên nghiên cứu khoa học năm 2013, Trường Đại học Đồng Tháp [11] và được công bố trong bài báo [12].

Trước hết, chúng tôi đề xuất khái niệm ánh xạ (μ, ψ)-f-co yếu tổng quát trong không gian kiểu-mêtric sắp thứ tự.

2.1.1 Định nghĩa ([12], Định nghĩa 2.1)**.** Cho $(X, D, K, \preceq)$ là không gian kiểu-mêtric sắp thứ tự, hai ánh xạ $T, f : X \longrightarrow X$, hàm biến thiên khoảng cách μ và hàm $\psi \in \Psi$. Ánh xạ T được gọi là (μ, ψ)-f-*co yếu tổng quát* nếu

$$\begin{aligned}\mu(D(Tx, Ty)) \;\leq\; \mu\left(\frac{1}{K(K+1)}\left(D(fx, Ty) + D(fy, Tx)\right)\right) \\ -\psi(D(fx, Ty), D(fy, Tx)) \qquad (2.1)\end{aligned}$$

với mọi $x, y \in X$ mà $fx \succeq fy$.

Tiếp theo, chúng tôi trình bày định lí điểm bất động chung của lớp xạ (μ, ψ)-f-co yếu tổng quát trên không gian kiểu-mêtric sắp thứ tự như sau.

2.1.2 Định lí ([12], Định lí 2.2)**.** *Cho $(X, D, K, \preceq)$ là một không gian kiểu-mêtric đầy đủ sắp thứ tự, trong đó D là ánh xạ liên tục và hai ánh xạ $T, f : X \longrightarrow X$ thoả mãn các điều kiện sau.*

(1) $TX \subset fX$ và fX là tập đóng;

(2) T là ánh xạ f-đơn điệu không giảm và (μ, ψ)-f-co yếu tổng quát;

(3) f và T là tương thích yếu;

(4) Nếu $\{fx_n\}$ là dãy không giảm và $\{fx_n\} \longrightarrow fz \in fX$ thì $fx_n \preceq fz$ và $fz \preceq f(fz)$;

(5) Tồn tại $x_0 \in X$ sao cho $fx_0 \preceq Tx_0$.

Khi đó, f và T có điểm bất động chung. Hơn nữa, $F(T; f)$ là tập sắp thứ tự tốt khi và chỉ khi f và T có duy nhất điểm bất động chung.

Chứng minh. Khi $K = 1$, Định lí 2.1.2 trở thành [2, theorem 2.1]. Do đó, trong chứng minh này ta chỉ xét $K > 1$. Chọn $x_0 \in X$ sao cho $fx_0 \preceq Tx_0$.

Do $TX \subset fX$ nên tồn tại $x_1 \in X$ sao cho $fx_1 = Tx_0$. Do $Tx_1 \in fX$ nên tồn tại $x_2 \in X$ sao cho $fx_2 = Tx_1$. Tiếp tục quá trình này, ta xây dựng được dãy $\{x_n\} \subset X$ sao cho $fx_{x+1} = Tx_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Vì $fx_0 \preceq Tx_0 = fx_1$ và T là hàm đơn điệu f-không giảm nên $Tx_0 \preceq Tx_1$ hay $fx_1 \preceq fx_2$. Vì $fx_1 \preceq fx_2$ và T là hàm đơn điệu f-không giảm nên $Tx_1 \preceq Tx_2$ hay $fx_2 \preceq fx_3$. Tiếp tục quá trình này, ta chứng minh được

$$fx_n \preceq fx_{n+1} \text{ và } Tx_n \preceq Tx_{n+1} \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

Do $fx_n \preceq fx_{n+1}$ nên từ (2.1) ta được

$$\begin{aligned}\mu(D(Tx_{n+1}, Tx_n)) &\leq \mu\Big(\frac{1}{K(K+1)}(D(fx_{n+1}, Tx_n) + D(fx_n, Tx_{n+1}))\Big) \\ &\qquad -\psi(D(fx_{n+1}, Tx_n), D(fx_n, Tx_{n+1})) \\ &\leq \mu(\frac{1}{K(K+1)}D(Tx_{n-1}, Tx_{n+1})).\end{aligned}$$

Vì μ là hàm không giảm nên

$$\begin{aligned}D(Tx_{n+1}, Tx_n) &\leq \frac{1}{K(K+1)}D(Tx_{n-1}, Tx_{n+1}) \\ &\leq \frac{1}{K+1}(D(Tx_n, Tx_{n-1}) + D(Tx_{n+1}, Tx_n)).\end{aligned}$$

Điều này tương đương với $D(Tx_{n+1}, Tx_n) \leq \dfrac{1}{K}D(Tx_n, Tx_{n-1})$ với mọi $n \geq 1$. Lặp lại quá trình này ta được

$$D(Tx_{n+1}, Tx_n) \leq \frac{1}{K}D(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq \ldots \leq \frac{1}{K^n}D(Tx_1, Tx_0) \tag{2.3}$$

Theo tính chất (3) của kiểu-mêtric D, với mọi $m, n \in N$ mà $n > m$ ta có

$$D(Tx_m, Tx_n) \leq K(D(Tx_m, Tx_{m+1}) + D(Tx_{m+1}, T_{m+2}) + ... + D(Tx_{n-1}, Tx_n)). \tag{2.4}$$

Từ (2.4), sử dụng (2.3) và do $K > 1$ nên

$$\begin{aligned} D(Tx_m, Tx_n) &\leq K(\frac{1}{K^m} + \frac{1}{K^{m+1}} + ... + \frac{1}{K^{n-1}})D(Tx_1, Tx_0) \\ &= K\frac{1}{K^m}\frac{1 - \frac{1}{K^{n-m}}}{1 - \frac{1}{K}}D(Tx_1, Tx_0) \\ &\leq \frac{1}{K-1}\frac{1}{K^{n-2}}D(Tx_1, Tx_0). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Cho $m, n \to \infty$ trong (2.5) ta được $\lim\limits_{n\to\infty} D(Tx_m, Tx_n) = 0$. Do đó $\{Tx_n\}$ là dãy Cauchy. Vì $fx_{n+1} = Tx_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ nên $\{fx_n\}$ cũng là dãy Cauchy trong fX. Do X đầy đủ và fX là tập đóng nên fX đầy đủ. Do đó $\{fx_n\}$ hội tụ trong fX, tức là tồn tại $z \in X$ sao cho

$$\lim_{n\to\infty} fx_{n+1} = \lim_{n\to\infty} Tx_n = fz. \tag{2.6}$$

Từ (2.3), (2.6) và theo giả thiết (4) suy ra $fx_n \preceq fz$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ và $fz \preceq f(fz)$.

Do T là (μ, ψ)-f-co yếu tổng quát nên

$$\begin{aligned} \mu(D(Tz, fx_{n+1})) &= \mu(D(Tz, Tx_n)) \\ &\leq \mu(\frac{1}{K(K+1)}(D(fz, Tx_n) + D(fx_n, Tz))) \\ &\quad -\psi(D(fz, Tx_n), D(fx_n, Tz)). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Cho $n \to \infty$ trong (2.7) ta được $\mu(D(Tz, fz)) \leq \mu(\frac{1}{K(K+1)}D(fz, Tz))$.

Vì μ là hàm không giảm nên $D(Tz, fz) \leq \frac{1}{K(K+1)}D(fz, Tz)$. Từ đó, ta có $D(Tz, fz) = 0$, suy ra $Tz = fz$. Do đó, z là điểm trùng của T và f.

Do T và f là cặp tương thích yếu nên đặt $w = Tz = fz$. Khi đó

$$Tw = Tfz = fTz = fw. \tag{2.8}$$

Do $fw = ffz \succeq fz$ và T là (μ,ψ)-f-co yếu tổng quát nên

$$\begin{aligned}\mu(D(Tw,Tz)) &\leq \mu(\frac{1}{K(K+1)}(D(fw,Tz)+D(fz,Tw))) \\ &\qquad\qquad -\psi(D(fw,Tz),D(fz,Tw)) \\ &\leq \mu(\frac{2}{K(K+1)}D(Tw,Tz))\end{aligned}$$

Vì μ là hàm không giảm nên $D(Tw,Tz) \leq \dfrac{2}{K(K+1)}D(Tw,Tz)$. Kết hợp với $K > 1$ ta có

$$D(Tw,Tz) = 0 \text{ hay } Tw = Tz. \tag{2.9}$$

Từ (2.8) và (2.9) suy ra $fw = Tw = w$ hay w là điểm bất động chung của T và f.

Bây giờ, giả sử rằng $F(T;f)$ là sắp thứ tự tốt. Ta chứng tỏ rằng điểm bất động chung của T và f là duy nhất. Giả sử tồn tại u, v sao cho $fu = Tu = u$ và $fv = Tv = v$. Vì $u, v \in F(T;f)$ và $F(T;f)$ là sắp thứ tự tốt nên u và v so sánh được. Không mất tính tổng quát, giả sử $u \succeq v$. Suy ra $fu = u \succeq v = fv$. Do $fu \succeq fv$. và T là (μ,ψ)-f-co yếu tổng quát nên

$$\begin{aligned}\mu(D(u,v)) &= \mu(D(Tu,Tv)) \\ &\leq \mu(\frac{1}{K(K+1)}(D(fu,Tv)+D(fv,Tv))) \\ &\qquad\qquad -\psi(D(fu,Tv),D(fv,Tu)) \\ &\leq \mu(\frac{2}{K(K+1)}D(u,v))\end{aligned}$$

Vì μ là hàm không giảm nên $D(u,v) \leq \dfrac{2}{K(K+1)}D(u,v)$. Từ đó kết hợp với $K > 1$ ta có $D(u,v) = 0$ hay $u = v$. Vậy điểm bất động chung của T và f là duy nhất.

Ngược lại, nếu T và f có duy nhất một điểm bất động chung thì $F(T;f)$ chỉ có một phần tử nên sắp thứ tự tốt. $\square$

Lập luận tương tự như trong chứng minh Định lí 2.1.2 với f là ánh xạ đồng nhất, chúng tôi nhận được hệ quả sau.

2.1.3 Hệ quả ([12], Hệ quả 2.3)**.** *Cho* $(X, D, K, \preceq)$ *là một không gian kiểu-mêtric đầy đủ sắp thứ tự, trong đó* D *là ánh xạ liên tục và hai ánh xạ* $T, f : X \longrightarrow X$ *thoả mãn các điều kiện sau.*

(1) T *là ánh xạ đơn điệu không giảm thỏa mãn*

$$\begin{aligned} \mu(D(Tx, Ty)) \;&\leq\; \mu\left(\frac{1}{K(K+1)}\,(D(x, Ty) + D(y, Tx))\right) \\ &\qquad\qquad -\psi(D(x, Ty), D(y, Tx)) \end{aligned}$$

với mọi $x, y \in X$ *mà* $x \succeq y$, *trong đó* μ *là hàm biến thiên khoảng cách và* $\psi \in \Psi$;

(2) Tồn tại $x_0 \in X$ *sao cho* $x_0 \preceq Tx_0$;

(3) Nếu T *liên tục hoặc nếu* $\{x_n\}$ *là dãy không giảm và* $\{x_n\} \to z \in X$ *thì* $x_n \preceq z$.

Khi đó, T *có điểm bất động. Hơn nữa, nếu với bất kỳ* $x, y \in X$ *luôn tồn tại* $w \in X$ *sao cho* w *so sánh được với* x *và* y *thì điểm bất động của* T *là duy nhất.*

Chứng minh. Ta xét hai trường hợp.

Trường hợp 1. T liên tục. Lập luận tương tự như trong chứng minh Định lí 2.1.2 với f là ánh xạ đồng nhất ta chứng minh được $\{x_n\}$ là dãy Cauchy. Do X là đầy đủ nên $\{x_n\}$ hội tụ. Giả sử $lim x_n = z$. Khi đó, vì $x_{n+1} = Tx_n$ và T liên tục nên $z = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} Tx_n = T(\lim\limits_{n\to\infty} x_n) = Tz$. Do đó T có một điểm bất động là z.

Bây giờ, giả sử u và v là hai điểm bất động của T sao cho $u \neq v$. Khi đó, tồn tại $w \in X$ sao cho w so sánh được với u và v. Vì w so sánh được với u, không mất tính tổng quát ta giả sử $u \succeq w$. Vì T là ánh xạ không giảm nên suy ra $T^n u \succeq T^n w$. Theo giả thiết (1) ta có

$$\begin{aligned}
\mu(D(u, T^n w) &= \mu(D(T^n u, T^n w)) = \mu(D(TT^{n-1}u, TT^{n-1}w) \\
&\leq \mu(\frac{1}{K(K+1)}(D(T^{n-1}u, T^n w) + D(T^{n-1}w, T^n u))) \\
&\qquad -\psi(D(T^{n-1}u, T^n w), D(T^{n-1}w, T^n u)) \\
&= \mu(\frac{1}{K(K+1)}(D(u, T^n w) + D(T^{n-1}w, u))) \\
&\qquad -\psi(D(u, T^n w), D(T^{n-1}w, u)) \\
&\leq \mu(\frac{1}{K(K+1)}(D(u, T^n w) + D(T^{n-1}w, u))). \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

Vì μ là hàm không giảm nên suy ra

$$\mu(D(u, T^n w) \leq \frac{1}{K(K+1)}(D(u, T^n w) + D(T^{n-1}w, u)).$$

Điều này dẫn đến $D(u, T^n w) \leq \dfrac{1}{K} D(u, T^{n-1}w) \leq D(u, T^{n-1})$. Do đó $\{D(u, T^n w)\}$ là dãy đơn điệu giảm không âm. Suy ra tồn tại $r \geq 0$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} D(u, T^n w) = r$.

Khi đó cho $n \to \infty$ trong (2.10) và từ tính liên tục của μ và nửa liên tục dưới của ψ ta được $\mu(r) \leq \mu(\dfrac{2r}{K(K+1)}) - \psi(r, r) \leq \mu(\dfrac{2r}{K(K+1)})$. Vì μ là hàm không giảm nên suy ra $r \leq \dfrac{2r}{K(K+1)}$. Từ đó kết hợp với $K > 1$ suy ra $r = 0$. Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} D(u, T^n w) = 0$ hay $\lim\limits_{n\to\infty} T^n w = u$.

Tương tự, w so sánh được với v ta cũng chứng minh được $\lim\limits_{n\to\infty} T^n w = v$. Do tính duy nhất của giới hạn nên $u = v$.

Trường hợp 2. Nếu dãy $\{x_n\}$ là dãy không giảm và $\{x_n\} \to z \in X$ thì

$x_n \preceq z$. Khi đó, trong Định lí 2.1.2 bằng cách chọn f là ánh xạ đồng nhất, ta thu được điều phải chứng minh. $\square$

Trong Hệ quả 2.1.3, nếu μ là ánh xạ đồng nhất thì ta thu được hệ quả sau.

2.1.4 Hệ quả ([12], Hệ quả 2.4)**.** *Cho* $(X, D, K, \preceq)$ *là một không gian kiểu-mêtric đầy đủ sắp thứ tự, trong đó* D *là ánh xạ liên tục và hai ánh xạ* $T, f : X \longrightarrow X$ *thoả mãn các điều kiện sau.*

(1) T *là ánh xạ đơn điệu không giảm thỏa mãn*

$$D(Tx, Ty) \leq \frac{1}{K(K+1)} \left(D(x, Ty) + D(y, Tx)\right) - \psi(D(x, Ty), D(y, Tx))$$

với mọi $x, y \in X$ *mà* $x \succeq y$*, trong đó* $\psi \in \Psi$*;*

(2) Tồn tại $x_0 \in X$ *sao cho* $x_0 \preceq Tx_0$*;*

(3) Nếu T *liên tục hoặc nếu* $\{x_n\}$ *là dãy không giảm và* $\{x_n\} \to z \in X$ *thì* $x_n \preceq z$*.*

Khi đó, T *có điểm bất động. Hơn nữa, nếu với bất kỳ* $x, y \in X$ *luôn tồn tại* $w \in X$ *sao cho* w *so sánh được với* x *và* y *thì điểm bất động của* T *là duy nhất.*

Trong Hệ quả 2.1.4, nếu $\psi(x, y) = \left(\dfrac{1}{K(K+1)} - \lambda\right)(x + y)$ với $x, y \geq 0$ và $0 < \lambda < \dfrac{1}{K(K+1)}$ thì ta thu được hệ quả sau.

2.1.5 Hệ quả ([12], Hệ quả 2.5)**.** *Cho* $(X, D, K, \preceq)$ *là một không gian kiểu-mêtric đầy đủ sắp thứ tự, trong đó* D *là ánh xạ liên tục và hai ánh xạ* $T, f : X \longrightarrow X$ *thoả mãn các điều kiện sau.*

(1) T là hàm đơn điệu không giảm thoả mãn

$$D(Tx, Ty) \leq \lambda \left(D(x, Ty) + D(y, Tx) \right), 0 < \lambda < \frac{1}{K(K+1)}$$

với mọi $x, y \in X$ mà $x \succeq y$;

(2) Tồn tại $x_0 \in X$ sao cho $x_0 \preceq Tx_0$;

(3) Ánh xạ T liên tục hoặc nếu $\{x_n\}$ là dãy không giảm và $\{x_n\} \to z \in X$ thì $x_n \preceq z$.

Khi đó, T có điểm bất động. Hơn nữa, nếu với bất kỳ $x, y \in X$ luôn tồn tại $w \in X$ sao cho w so sánh được với x và y thì điểm bất động của T là duy nhất.

Cuối cùng của mục này, chúng tôi xây dựng ví dụ minh họa cho Định lí 2.1.2.

2.1.6 Ví dụ ([12], Ví dụ 2.6)**.** Cho $X = \{0, 1, 2\}$ với thứ tự thông thường trên $\mathbb{R}$ và ánh xạ xác định bởi

$$D(0,0) = D(1,1) = D(2,2) = 0,\ D(1,2) = D(2,1) = 4,$$
$$D(0,1) = D(1,0) = D(0,2) = D(2,0) = 1.$$

Khi đó (X, D) là không gian kiểu-mêtric sắp thứ tự đầy đủ với $K = 2$.

Xét hai ánh xạ $T, f : X \longrightarrow X$ xác định bởi

$$T0 = T1 = T2 = 0, f0 = 0, f1 = f2 = 2.$$

Xét hàm $\mu(t) = 6t$ với mọi $t \geq 0$ và hàm $\psi(a, b) = \dfrac{1}{2}(a + b)$ với $a, b \geq 0$.

Khi đó, với mọi $fx \geq fy$ ta có $\mu(D(Tx, Ty) = \mu(D(0,0)) = 0$ và

$$\begin{aligned} & \mu\left(\frac{1}{6}\left(D(fx,Ty) + D(fy,Tx)\right)\right) - \psi(D(fx,Ty), D(fy,Tx)) \\ = \; & \mu\left(\frac{1}{6}\left(D(fx,0) + D(fy,0)\right)\right) - \psi(D(fx,0), D(fy,0)) \\ = \; & \frac{1}{2}\left(D(fx,0) + D(fy,0)\right). \end{aligned}$$

Do đó

$$\mu(D(Tx,Ty) \leq \mu\left(\frac{1}{6}\left(D(fx,Ty) + D(fy,Tx)\right)\right) - \psi(D(fx,Ty), D(fy,Tx))$$

hay T là (μ, ψ)-f-co yếu tổng quát. Đồng thời các giả thiết còn lại trong Định lí 2.1.2 đều thỏa mãn. Do đó, T và f có điểm bất động chung.

2.2 Một số áp dụng

Trong mục này, chúng tôi áp dụng Hệ quả 2.1.3 để thiết lập một số kết quả điểm bất động kép. Trước hết, chúng tôi thiết lập mệnh đề sau.

2.2.1 Mệnh đề. *Cho (X, D, K) là một không gian kiểu-mêtric. Khi đó*

(1) $D_1((x,y),(u,v)) = D(x,u) + D(y,v)$ là một kiểu-mêtric trên X^2.

(2) Dãy $\{(x_n, y_n)\}$ hội tụ trong (X^2, D_1, K) khi và chỉ khi $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ hội tụ trong (X, D, K).

(3) Dãy $\{(x_n, y_n)\}$ là dãy Cauchy trong (X^2, D_1, K) khi và chỉ khi dãy $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ là dãy Cauchy trong (X, D, K).

(4) Không gian (X^2, D_1, K) đầy đủ khi và chỉ khi không gian (X, D, K) đầy đủ.

Chứng minh. (1). Kiểm tra trực tiếp các điều kiện của một kiểu-mêtric.

(2). Suy ra từ đẳng thức $D_1((x_n, y_n), (x, y)) = D(x_n, x) + D(y_n, y)$.

(3). Suy ra từ đẳng thức $D_1((x_n, y_n), (x_m, y_m)) = D(x_n, x_m) + D(y_n, y_m)$.

(4). Suy ra từ (2) và (3). □

Cho $(X, \preceq)$ là tập sắp thứ tự. Trên X^2 ta xét quan hệ thứ tự sau:

$$(x, y) \preceq (u, v) \text{ khi và chỉ khi } x \preceq u \text{ và } y \succeq v.$$

Tiếp theo, chúng tôi thiết lập định lí điểm bất động kép của ánh xạ.

2.2.2 Định lí. *Cho $(X, D, K, \preceq)$ là không gian kiểu-mêtric đầy đủ sắp thứ tự, trong đó D là ánh xạ liên tục và ánh xạ $F : X \times X \to X$ đơn điệu hỗn hợp thỏa mãn các điều kiện sau.*

(1) Tồn tại hàm biến thiên khoảng cách μ và hàm $\psi \in \Psi$ sao cho

$$\begin{aligned}
&\mu\left(D(F(x,y), F(u,v)) + D(F(y,x), F(v,u))\right) \\
\le\ & \mu\Big(\frac{1}{K(K+1)}\big(D(x, F(u,v)) + D(y, F(v,u)) + D(u, F(x,y)) \\
&\qquad + D(v, F(y,x))\big)\Big) - \psi\Big(D(x, F(u,v)) + D(y, F(v,u)), \\
&\qquad\qquad D(u, F(x,y)) + D(v, F(y,x))\Big)
\end{aligned}$$

với mọi $x, y, u, v \in X$ mà $x \succeq u$,$y \preceq v$;

(2) Tồn tại $(x_0, y_0) \in X \times X$ sao cho $x_0 \preceq F(x_0, y_0)$ và $y_0 \succeq F(y_0, x_0)$;

(3) Nếu F liên tục hoặc nếu $\{x_n\}, \{y_n\}$ là hai dãy không giảm sao cho $\{x_n\}$ hội tụ đến $z_1 \in X$ và $\{y_n\}$ hội tụ đến $z_2 \in X$ thì $x_n \preceq z_1, y_n \succeq z_2$.

Khi đó, F có điểm bất động kép.

Chứng minh. Đặt

$$D_1((x,y),(u,v)) = D(x,u) + D(y,v)$$

với mọi $(x,y),(u,v) \in X \times X$ và ánh xạ $T_F : X \times X \to X \times X$ xác định bởi

$$T_F(x,y) = (F(x,y), F(y,x))$$

với $x, y \in X$. Theo Mệnh đề 2.2.1, (X^2, D_1, K) là một không gian kiểu-mêtric đầy đủ. Từ điều kiện (1) ta có

$$\begin{aligned}
&\mu(D_1(T_F(x,y), T_F(u,v)) \\
\leq\ &\mu\left(\frac{1}{K(K+1)}\left(D_1((x,y),T_F(u,v)) + D_1((u,v),T_F(x,y))\right)\right) \\
&\quad -\psi\left(D_1((x,y),T_F(u,v)), D_1((u,v),T_F(x,y))\right)
\end{aligned}$$

với mọi $(x,y) \succeq (u,v)$.

Giả sử tồn tại $(x_0,y_0) \in X \times X$ sao cho $x_0 \preceq F(x_0,y_0), y_0 \succeq F(y_0,x_0)$.

Suy ra $(x_0,y_0) \preceq (F(x_0,y_0), F(y_0,x_0))$ hay $(x_0,y_0) \preceq T_F(x_0,y_0)$.

Hơn nữa, các điều kiện khác của Hệ quả 2.1.3 được thỏa mãn. Do đó, T_F có điểm bất động. Theo Bổ đề 1.2.4 suy ra F có điểm bất động kép. $\square$

Trong Định lí 2.2.2, nếu μ là ánh xạ đồng nhất thì ta thu được hệ quả sau.

2.2.3 Hệ quả. *Cho $(X, D, K, \preceq)$ là không gian kiểu-mêtric đầy đủ sắp thứ tự và ánh xạ $F : X \times X \to X$ đơn điệu hỗn hợp thỏa mãn các điều kiện sau.*

(1) Tồn tại hàm $\psi \in \Psi$ sao cho

$$\begin{aligned}
&D(F(x,y), F(u,v)) + D(F(y,x), F(v,u)) \\
&\leq \frac{1}{K(K+1)}\left(D(x,F(u,v)) + D(y,F(v,u)) + D(u,F(x,y)) + D(v,F(y,x))\right) \\
&\qquad -\psi\left((D(x,F(u,v)) + D(y,F(v,u)), (D(u,F(x,y)) + D(v,F(y,x))\right)
\end{aligned}$$

với mọi $x, y, u, v \in X$ *mà* $x \succeq u$,$y \preceq v$;

(2) Tồn tại $(x_0, y_0) \in X \times X$ *sao cho* $x_0 \preceq F(x_0, y_0)$ *và* $y_0 \succeq F(y_0, x_0)$;

(3) Nếu F *liên tục hoặc nếu* $\{x_n\}, \{y_n\}$ *là hai dãy không giảm và* $\{x_n\}$ *hội tụ đến* $z_1 \in X$ *và* $\{y_n\}$ *hội tụ đến* $z_2 \in X$ *thì* $x_n \preceq z_1, y_n \succeq z_2$.

Khi đó, F *có điểm bất động kép.*

Trong Hệ quả 2.2.3, nếu $\psi(x, y) = \left(\dfrac{1}{K(K+1)} - \lambda\right)(x + y)$ với $x, y \geq 0$ và $0 < \lambda < \dfrac{1}{K(K+1)}$ thì ta thu được hệ quả sau.

2.2.4 Hệ quả. *Cho* $(X, D, K, \preceq)$ *là không gian kiểu-mêtric đầy đủ sắp thứ tự và ánh xạ* $F : X \times X \to X$ *đơn điệu hỗn hợp thỏa mãn các điều kiện sau*

(1) Tồn tại $0 < \lambda < \dfrac{1}{K(K+1)}$ *sao cho*

$$D(F(x, y), F(u, v)) + D(F(y, x), F(v, u))$$
$$\leq \lambda\left(D(x, F(u, v)) + D(y, F(v, u)) + D(u, F(x, y)) + D(v, F(y, x))\right)$$

với mọi $x, y, u, v \in X$ *mà* $x \succeq u$,$y \preceq v$;

(2) Tồn tại $(x_0, y_0) \in X \times X$ *sao cho* $x_0 \preceq F(x_0, y_0)$ *và* $y_0 \succeq F(y_0, x_0)$;

(3) Nếu F *liên tục hoặc nếu* $\{x_n\}, \{y_n\}$ *là hai dãy không giảm và* $\{x_n\}$ *hội tụ đến* $z_1 \in X$ *và* $\{y_n\}$ *hội tụ đến* $z_2 \in X$ *thì* $x_n \preceq z_1, y_n \succeq z_2$.

Khi đó, F *có điểm bất động kép.*

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

1 Kết luận

Đề tài đã đạt được những kết quả sau.

- Hệ thống hóa một số khái niệm, tính chất cơ bản của không gian kiểu-mêtric.

- Đề xuất khái niệm ánh xạ (μ, ψ)-f-co yếu tổng quát trong không gian kiểu-mêtric: Định nghĩa 2.1.1

- Thiết lập và chứng minh định lí điểm bất động chung của lớp ánh xạ (μ, ψ)-f-co yếu tổng quát trong không gian kiểu-mêtric: Định lí 2.1.2 và một số hệ quả như Hệ quả 2.1.3, Hệ quả 2.1.4, Hệ quả 2.1.5.

- Xây dựng ví dụ minh hoạ cho Định lí 2.1.2: Ví dụ 2.1.6.

- Xây dựng một số áp dụng của Hệ quả 2.1.3 trong việc thiết lập định lí điểm bất động kép như Định lí 2.2.2, Hệ quả 2.2.3, Hệ quả 2.2.4.

- Các kết quả chính của đề tài được báo cáo trong Hội nghị sinh viên nghiên cứu khoa học năm 2013, Trường Đại học Đồng Tháp [11] và được công bố trong bài báo [12].

2 Kiến nghị

Trong thời gian tới, đề tài có thể phát triển theo hướng sau:

- Nghiên cứu về điểm bất động chung của ánh xạ (μ, ψ)-f-co yếu tổng quát trên một số không gian mêtric suy rộng khác.

- Tìm một số áp dụng cho định lí điểm bất động được thiết lập của đề tài trong lĩnh vực phương trình vi phân, phương trình tích phân và phương trình đạo hàm riêng.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] T. Gnana Bhaskar and V. Lakshmikantham (2006), *Fixed point theorems in partially ordered metric spaces and applications*, Nonlinear Anal. **65**, 1379-1393.

[2] S. Chandok (2013), *Some common fixed point results for generalized weak contractive mappings in partially ordered metric spaces*, J. Nonlinear Anal. Optim. **18**, 45-52.

[3] S. K. Chatterjea (1972), *Fixed point theorems*, Rend. Acad. Bulgare. Sci. **25**, 727-730.

[4] B. S. Choudhury (2009), *Unique fixed point theorem for weakly C- contractive mapping*, Kathmandu Univ. J. Sci. Engi. Tech. **5**, 6-13.

[5] P. Collaco and J. C. E. Silva (1997), *A complete comparison of 25 contraction conditions*, Nonlinear Anal. **30**(1), 471-476.

[6] B. C. Dhage (1992), *Generalized metric spaces mappings with fixed point*, Bull. Calcutta Math. Soc. **84**, 329-336.

[7] N. V. Dung, V. T. L. Hang and S. Sedghi (2013), *Remarks on metric-type spaces and applications*, **18**, 13 pages, sumitted.

[8] S. Gahler (1963), *2 - metricsche Raume und iher topoloische Struktur*, Math. Nachr. **26**, 115-148.

[9] J. Harjani, B. López and K. Sadarangani (2011), *Fixed point theorems for weakly C- contractive mappings in ordered metric spaces*, Comput. Math. Appl. **61**, 790-796.

[10] N. T. Hieu and V. T. L. Hang (2013), *Coupled fixed point theorems for generalized -ψ-contactive mappings in partially ordered metric-type spaces*, submitted.

[11] N. T. Hiếu và H. H. Hưởng (2013), *Về định lí điểm bất động chung cho ánh xạ trong không gian kiểu-mêtric*, Kỷ yếu hội nghị sinh viên nghiên cứu khoa học năm 2013, Lĩnh vực Khoa học Tự nhiên, 30-38.

[12] N. T. Hiếu và H. H. Hưởng (2014), *Về định lí điểm bất động chung cho ánh xạ trong không gian kiểu-mêtric*, Tạp chí Khoa học Đại học Đồng Tháp, (đã nhận đăng).

[13] M. S. Khan, M. Swaleh and S. Sessa (1984), *Fixed point theorems by altering distances between the points*, Bull. Austral. Math. Soc. **30**(1), 1-9.

[14] M. A. Khamsi (2010), *Remarks on cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings*, Fixed Point Theory App. 7 pages.

[15] M. A. Khamsi and N. Hussain (2010), *KKM mappings in metric type spaces*, Nonliear Anal. **73**(9), 3123-3129.

[16] A. J. Kurdila and M. Zabarankin (2005), *Convex Functional Analysis*, Birkhauser Verlag.

[17] Z. Mustafa and B. Sims (2006), *A new approach to generalized metric spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **7**(2), 289-297.

[18] B. E. Rhoades (1977), *A comparison of various definitions of contractive mappings*, Trans. Amer. Math. Soc. **226**, 257-290.

[19] B. Samet, C. Vetro and P. Vetro (2012), *Fixed point theorems for α-ψ-contractive type mappings*, Nonlinear Anal. **75**, 2154-2165.

[20] S. Sedghi, N. Shobe and A. Aliouche (2012), *A generalization of fixed point theorem in S-metric spaces*, Mat. Vesnik. 64(3) 258-266.

PHỤ LỤC

Nội dung bài báo khoa học về các kết quả của đề tài

[1] N. T. Hiếu và H. H. Hưởng (2014), *Về định lí điểm bất động chung cho ánh xạ trong không gian kiểu-mêtric*, Tạp chí Khoa học Đại học Đồng Tháp, (đã nhận đăng).